

A. LOGARITMIKUS DIFFERENCIÁLÁS. AZ INVERZ FÜGGVÉNY ÉS ANNAK DERIVÁLTJA. L'HOSPITAL-SZABÁLY

1. Alkalmazza a logaritmikus differenciálás módszerét!

a) $f(x) = e^{x^2}$;

b) $g(x) = (5 - 2x)^x$;

c) $h(x) = (6 - x^2)^{x^2}$;

d) $i(x) = x^{\cos x}$;

e) $j(x) = x^{x^2+2x-3}$;

f) $k(x) = x^{\sqrt{5-x^2}}$.

2. Adja meg a következő függvények inverzét, majd deriválja azt az inverz függvényre vonatkozó szabály segítségével.

a) $f(x) = x^3$;

b) $g(x) = x^4$;

c) $h(x) = x^2 - 4$;

d) $i(x) = \sin x$;

e) $j(x) = \cos x$.

3. Alkalmazza a L'Hospital-szabályt a következő határértékek meghatározásához.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{x-2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x-1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$;

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x^2}$;

g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a^n}$;

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$;

i) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$;

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x}$;

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{7x^3 + 5x - 3}$;

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$.

B. FÜGGVÉNYDERIVÁLT ÉS MONOTONITÁS

4. Keresse meg a következő függvények deriváltjainak zérushelyeit.

a) $f(x) = 3$;

b) $g(x) = 2x - 3$;

c) $h(x) = x^2 - 5$;

d) $i(x) = -x^2 + 5x$;

e) $j(x) = x^3 - 4x^2$;

f) $k(x) = (x + 2)^3 - 6$;

g) $l(x) = \sqrt{2x + 6}$

h) $m(x) = \frac{1}{2x+1}$;

i) $n(x) = \sin(3x^2)$.

5. Vizsgálja az első derivált segítségével az alábbi függvények monotonitását!

a) $y = 1,001x - 3$;

b) $y = 3x^2 + 2$;

c) $y = -x^2 + 2x + 5$;

d) $y = -x^3 - 3x^2 + 4x + 5$;

e) $y = \frac{1}{x^2}$;

f) $y = \frac{1}{x^2 - x - 2}$;

g) $y = \sin 2x$.

C. DERIVÁLT ÉS SZÉLSŐÉRTÉK

6. Döntse el a deriváltak segítségével, hogy van-e, s ha igen, hol és milyen szélsőértéke az alábbi függvényeknek.

a) $f(x) = -3x^2 + 7x + 9$;

b) $g(x) = x^2 - 2x + 3$;

c) $h(x) = 2x^3 + 15x^2 - 84x + 106$;

d) $i(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

e) $j(x) = \frac{2x-1}{x^2+4}$;

f) $k(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;

g) $l(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$;

h) $m(x) = \frac{\sin x}{2 - \sin x}$;

i) $n(x) = x \cdot \ln x$;

j) $o(x) = e^x - e^{-x}$.

7. Diszkutálja az alábbi függvényeket!

a) $a(x) = x^2 - x - 2$;

b) $b(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

c) $c(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$;

d) $d(x) = x^5 - x^3$;

e) $e(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$;

f) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

g) $g(x) = x^x$.

