

A. További integráltrükkök

1. Integrálja az alábbi $f(ax + b)$ alakú integrandusokat!

a) $\int (7x - 5)^{2019} dx;$

c) $\int 7^{4x-\pi} dx;$

b) $\int \sqrt[5]{12-7x} dx;$

d) $\int \frac{1}{\cos^2(-3x-2)} dx.$

2. Integrálja az alábbi $f^n \cdot f'$ alakú integrandusokat!

a) $\int 3x^2(x^3 + 5) dx;$

d) $\int (2x^3 + 4)^5 x^2 dx;$

b) $\int \sin x \cos x dx;$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+6}} dx;$

c) $\int \frac{\ln x}{x} dx;$

f) $\int \sin^4(x) \sin 2x dx.$

3. Integrálja az alábbi $\frac{f'}{f}$ alakú integrandusokat!

a) $\int \frac{2x}{x^2+7} dx;$

c) $\int \tan x dx;$

b) $\int \frac{5x^2}{x^3+4} dx;$

d) $\int \frac{1}{x \ln x} dx.$

B. Forgástest térfogata

4. Határozza meg a forgástestek térfogatára vonatkozó integrálformulával az R sugarú gömb térfogatát!

5. Számítsa ki az x^2 és a $\sqrt{x}$ által határolt síkidom, az ún. szirmidom x tengely körüli forgatásával keletkezett forgástest térfogatát.

6. Számítsa ki a normálhiperbola x tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha a határok 1 és ∞ .

C. Kettős integrál

7. Integrálja az $f(x, y) = 3x^2 \sin y + 5xy^3 + 2$ függvényt az $x \in [0; 2], y \in [0, \pi]$ tartományon!

8. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét.

a) $y = \int_1^e \left(\int_0^2 \left(xy^3 + \frac{y}{x} \right) dy \right) dx;$

b) $y = \int_0^1 \left(\int_0^1 (y + e^x) dy \right) dx$

9. Számítsa ki!

a) $\int_0^1 \int_0^\pi y(y^2 + 2)^2 \sin 5x dx dy;$

c) $\int_1^e \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\ln y}{y} dx dy;$

b) $\int_0^1 \int_0^2 xye^x dy dx;$

d) $\int_0^2 \int_1^{\ln 2} e^{x+2y} dx dy.$

10. Határozza meg a következő kettős integrálokat.

a) $\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (y + 2x) \cos y dy \right) dx;$

b) $\int_0^3 \left(\int_1^5 \left(\frac{y^2}{x} (\log_5 x)^2 + \frac{y^2}{\sqrt{9+y^3}} \right) dx \right) dy.$

11. Számítsa ki a következő improprius kettős integrálokat!

a) $\int_1^\infty \left(\int_1^2 \left(\frac{3}{x^3 y} - \frac{y}{x^2} \right) dy \right) dx;$

c) $\int_1^\infty \left(\int_1^2 \left(\frac{e^{-x}}{y} + \frac{y^3}{x^2} \right) dy \right) dx;$

b) $\int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{y \cdot 2^{2x}}{(1+y^2)^2} dy \right) dx;$

d) $\int_1^\infty \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3}} y^3 dy dx.$

D. Vonalmenti integrál

12. Számítsa ki az adott ívhossz szerinti vonalintegrált:

$$\int_L \frac{1}{x-y} ds, \text{ ahol } L \text{ az } y = \frac{x}{2} - 2 \text{ egyenes } P_1(0; -2) \text{ és } P_2(4; 0) \text{ pontok közötti szakasza.}$$

13. Határozza meg az $\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ vektortérnek az $A(1; 2; 5)$ és a $B(4; 7; 9)$ pontokat összekötő egyenesszakaszra vett vonalintegrálját!