

I. Alapintegrálokra visszavezethető feladatok :

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}} dx = ?$	2. $\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}} dx = ?$	3. $\int \frac{-5}{2+2x^2} dx = ?$
4. $\int (5 \cdot 2^x + 4 \cdot \sin x - 3 \cdot \cos x) dx = ?$	5. $\int \operatorname{tg}^2 x dx = ?$	6. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = ?$
7. $\int \frac{\cos^2 x - 5}{1 + \cos 2x} dx = ?$	8. $\int \frac{5 \cdot \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = ?$	9. $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{7}{5 \cdot \sin^2 x} \right) dx = ?$
10. $\int 5 \cdot \operatorname{th}^2 x dx = ?$	11. $\int \operatorname{cth}^2 x dx = ?$	12. $\int (x^{-2} + x^{-1} - 2 \cdot 3^{x-1}) dx = ?$
13. $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} dx = ?$	14. $\int \frac{1}{4 \cdot \sqrt{5-5x^2}} dx = ?$	15. $\int \frac{1}{\sqrt{6+6x^2}} dx = ?$
16. $\int \frac{5}{4-4x^2} dx = ?$	17. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = ?$	18. $\int \frac{3}{\sqrt{7x^2-7}} dx = ?$

II. Integrálás helyettesítéssel :

a.) $f(a \cdot x + b)$ **alakú integrandus** $\Rightarrow \int f(a \cdot x + b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x + b) + c, \quad (F' = f)$

19. $\int \sqrt[4]{7x-16} dx = ?$	20. $\int e^{5x+4} dx = ?$	21. $\int \sin(4x+5) dx = ?$
22. $\int \operatorname{sh}(2-7x) dx = ?$	23. $\int (5 - \operatorname{th}^2(1-x)) dx = ?$	24. $\int \operatorname{tg}^2(2-3x) dx = ?$
25. $\int \frac{5}{\cos^2(4-6x)} dx = ?$	26. $\int \frac{7}{4x^2-4x+2} dx = ?$	27. $\int \frac{1}{1-x} dx = ?$
28. $\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = ?$	29. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x}} dx = ?$	30. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2(1-x)} dx = ?$

b.) Ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, akkor $\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$

31. $\int (3x^2 - \sin x) \cdot (x^3 + \cos x) dx = ?$	32. $\int x^2 \cdot (2x^3 + 4)^{99} dx = ?$	33. $\int 2\pi \cdot \sin^4 x \cdot \sin 2x dx = ?$
34. $\int \frac{\ln x}{x} dx = ?$	35. $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} dx = ?$	36. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = ?$
37. $\int (x^2+1) \cdot \sqrt[3]{x^3+3x+1} dx = ?$	38. $\int e^x \cdot (e^{2x} + e^{3x} - 1) dx = ?$	39. $\int 2^{x+1} \cdot \sqrt{2^x - 1} dx = ?$
40. $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2} dx = ?$	41. $\int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx = ?$	42. $\int \frac{\sin x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x - 1}}{\cos^3 x} dx = ?$
43. $\int \frac{\operatorname{arcsin} \sqrt{x}}{\sqrt{(1-x) \cdot x}} dx = ?$	44. $\int \frac{\sin 2x}{(5 - \sin^2 x)^7} dx = ?$	45. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ar} \operatorname{ch}^3 x}}{\sqrt{x^2-1}} dx = ?$
46. $\int e^x \cdot \sqrt{(e^x + 2003)^{27}} dx = ?$	47. $\int e^{2x} \cdot \sqrt{e^{2x} + 1} dx = ?$	48. $\int 2 \cdot e^{2 \cdot \sin x} \cdot \cos x dx = ?$

c.) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$

49. $\int \frac{x}{1+x^2} dx = ?$	50. $\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+1} dx = ?$	51. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\pi} dx = ?$
52. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 x + 2e} dx = ?$	53. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{th} x} dx = ?$	54. $\int \frac{1}{(x^2-1) \cdot \operatorname{arth} x} dx = ?$
55. $\int \operatorname{tg} x dx = ?$	56. $\int \operatorname{ctg} x dx = ?$	57. $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x} dx = ?$
58. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} dx = ?$	59. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = ?$	60. $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = ?$
61. $\int \frac{1}{x \cdot (\ln x + 1)} dx = ?$	62. $\int \frac{100}{(x+1) \cdot \ln(x+1)} dx = ?$	63. $\int \frac{1}{(x^2+1) \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} dx = ?$

d.) További feladatok (Integrálás helyettesítéssel):

64. $\int 5^{2-3x} dx = ?$	65. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = ?$	66. $\int (3x^2+2) \cdot \sin(x^3+2x-4) dx = ?$
67. $\int \frac{1}{\sin^2(3x+2)} dx = ?$	68. $\int \frac{1}{5^2+x^2} dx = ?$	69. $\int \frac{1}{36+16x^2} dx = ?$
70. $\int \frac{1}{\sqrt{36-16x^2}} dx = ?$	71. $\int \frac{1}{\sqrt{16+25x^2}} dx = ?$	72. $\int \frac{1}{\sqrt{25x^2-16}} dx = ?$
73. $\int \frac{1}{49-25x^2} dx = ?$	74. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = ? \quad (t := e^x)$	75. $\int \sqrt{1-x^2} dx = ? \quad (x := \sin t)$
76. $\int \sqrt{1+x^2} dx = ? \quad (x := \operatorname{sh} t)$	77. $\int \sqrt{x^2-1} dx = ? \quad (x := \operatorname{ch} t)$	78. $\int \sqrt{25-16x^2} dx = ?$

III. Parciális integrálás:

a.) Polinomfüggvénnyel szorzott exponenciális, trigonometrikus vagy hiperbolikus függvények integrálása:

79. $\int x \cdot e^{\pi \cdot x} dx = ?$	80. $\int (2x+3) \cdot \sin 6x dx = ?$	81. $\int (3x^2-1) \cdot \cos 5x dx = ?$
82. $\int (x^2+5x-1) \cdot e^{3x+7} dx = ?$	83. $\int (1-x^2) \cdot \operatorname{sh} 4x dx = ?$	84. $\int (1+2x^2) \cdot \operatorname{ch} 3x dx = ?$

b.) Logaritmus, arcsin és area függvények integrálása:

85. $\int \ln x dx = ?$	86. $\int \arcsin x dx = ?$	87. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx = ?$
88. $\int \operatorname{arsh} x dx = ?$	89. $\int \operatorname{arch} x dx = ?$	90. $\int \operatorname{ar} \operatorname{cth} x dx = ?$

c.) Exponenciális függvénnyel szorzott trigonometrikus vagy hiperbolikus függvények integrálása:

91. $\int e^{3x} \cdot \sin 2x dx = ?$	92. $\int 2^x \cdot \cos(3x-1) dx = ?$	93. $\int 3^{2x+1} \cdot \operatorname{sh}(4x-1) dx = ?$
--	--	--

d.) További feladatok (Parciális integrálás):

94. $\int \ln^3 x dx = ?$	95. $\int \operatorname{arc} \sin^2 x dx = ?$	96. $\int e^{\operatorname{arc} \sin x} dx = ?$
97. $\int \sin \sqrt{x} dx = ?$	98. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} dx = ?$	99. $\int x^{-\frac{1}{3}} \cdot \ln^2 x dx = ?$

IV. Racionális törtfüggvények integrálása :

a.) **Nevező** $(a \cdot x + b)^n$, **számláló elsőfokú** vagy **konstans** :

100. $\int \frac{14}{(6-4x)^7} dx = ?$	101. $\int \frac{5}{2-3x} dx = ?$	102. $\int \frac{5}{(2x+3)^4} dx = ?$
103. $\int \frac{3x}{(6-4x)^7} dx = ?$	104. $\int \frac{4x-3}{(3x-5)^3} dx = ?$	105. $\int \frac{3x+1}{(1-2x)^{101}} dx = ?$

b.) **Nevező másodfokú, számláló konstans** :

106. $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx = ?$	107. $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 20} dx = ?$	108. $\int \frac{2}{3x^2 + 6x + 15} dx = ?$
109. $\int \frac{2}{2x^2 - 3x + 20} dx = ?$	110. $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx = ?$	111. $\int \frac{1}{x^2 + 8x + 12} dx = ?$

c.) **Nevező másodfokú, számláló elsőfokú** :

112. $\int \frac{2x-3}{x^2 + 4x - 5} dx = ?$	113. $\int \frac{5x-6}{x^2 - 2x + 10} dx = ?$	114. $\int \frac{x+2}{x^2 - x + 2} dx = ?$
---	--	---

d.) **Parciális törtekre bontás** :

115. $\int \frac{14}{(x-3) \cdot (x+2) \cdot (x-4)} dx = ?$	116. $\int \frac{x^3-4}{5x^3-x} dx = ?$	117. $\int \frac{x^4}{(x-1) \cdot (x+2)} dx = ?$
118. $\int \frac{2x-4}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2} dx = ?$	119. $\int \frac{5}{x \cdot (x^2+4)} dx = ?$	120. $\int \frac{2x^2}{x^4-1} dx = ?$

V. Trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása :

a.) **Trigonometrikus függvények pozitív egész kitevős hatványai** :

121. $\int \sin^7 x dx = ?$	122. $\int \cos^4 x dx = ?$	123. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx = ?$
124. $\int \sin^4 x \cdot \cos^6 x dx = ?$	125. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^3 x dx = ?$	126. $\int \cos^2 2x \cdot \cos 3x dx = ?$

b.) **Helyettesítés** :

$$t := \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

127. $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx = ?$	128. $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = ?$	129. $\int \frac{1}{\sin x} dx = ?$
130. $\int \frac{1}{\cos x} dx = ?$	131. $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = ?$	132. $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = ?$
133. $\int \frac{\cos x}{\cos 2x} dx = ?$	134. $\int \frac{\sin x}{\cos 2x} dx = ?$	135. $\int \frac{1}{\sin x + \cos x - 2} dx = ?$

VI. Vegyes feladatok : (Primitív függvény, Riemann-integrál, Integrálfüggvény, Improprius integrál I.)

136. $\int \frac{1}{e^{2x} - 2e^x + 1} dx = ?$	137. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx = ?$	138. $\int \frac{1}{e^x + 20e^{-x} + 6} dx = ?$
139. $\int x \cdot \sqrt{x-1} dx = ?$	140. $\int x \cdot \sqrt[4]{x-1} dx = ?$	141. $\int (1+x^3)^{-1} dx = ?$

142. $\int \frac{1}{\sqrt{x \cdot (x-1)}} dx = ?$	143. $\int \frac{1}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} dx = ?$	144. $\int \frac{1}{\sqrt{x \cdot (1+x)}} dx = ?$
145. $\int \operatorname{sign} _{(0,+\infty)}(x) dx = ?$	146. $\int (2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) dx = ?$	147. $\int (2x \cdot \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}) dx = ?$
148. $\int_2^5 x^2 \cdot \sqrt{x-1} dx = ?$	149. $\int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = ?$	150. $\int_1^2 x^2 \cdot \ln \sqrt{x} dx = ?$
151. $\int_{-1}^1 \arctan x dx = ?$	152. $\int_{-1}^1 \arctan x dx = ?$	153. $\int_{-5}^5 \sin x^3 \cdot \ln(1+ x) dx = ?$
154. $\int_0^\pi x^2 \cdot \sin x dx = ?$	155. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx = ?$	156. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = ? \quad (n \in \mathbb{N}^+)$

157. a.) Van-e olyan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek van primitív függvénye, de f nem integrálható?

b.) Van-e olyan integrálható, nem folytonos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek van primitív függvénye?

c.) Van-e olyan integrálható $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek nincs primitív függvénye?

158. Igazoljuk, hogy az $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}^+ \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$ Riemann-függvény bármely korlátos és zárt intervallumon integrálható! Mivel egyenlő ez az integrál?

159. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

a.) $F: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_{-1}^x [t] dt,$

b.) $F: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_{-a}^x |t-1| + |t| dt, \quad (a \in \mathbb{R}^+) !$

160. Határozzuk meg az alábbi értékadásokkal adott függvények deriváltjait!

a.) $f(x) := \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt,$

b.) $f(x) := \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt,$

c.) $f(x) := \int_{\sin x}^{\cos x} \arcsin t dt !$

161. Léteznek-e az alábbi határértékek:

a.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \arctan^2 t dt}{\sqrt{x^2+1}},$

b.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} t dt}{\int_x^{\infty} e^{2t^2} t dt} ?$

162. Vizsgáljuk meg az $F: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ függvény monotonitási és görbületi tulajdonságait!

163. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = ?$	164. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$	165. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$
166. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = ?$	167. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$	168. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$