

A. Vektor-skalár-függvények

1. Számítsa ki a mozgó pont sebességét, gyorsulását, ha a pont mozgását a következő vektor-skalár-függvények írják le.

a) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}t$;

b) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(5t; t^2; t^4)$;

c) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\left(2t - 1; \frac{t^2}{4}; \sqrt{t}\right)$.

B. Skalár-vektor-függvények

2. Határozza meg az adott skalár-vektor-függvény (skalármező, skalártér) szintfelületeit/szintvonalait.

a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{4x}$;

b) $f(x, y) = x^2 - 4y^2$;

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{|\mathbf{r}|}$;

d) $f(x, y, z) = \frac{2}{x^2 + y^2 + z}$.

3. Határozza meg az alábbi skalárterek, -mezők gradiensfüggvényét.

a) $u(x, y, z) = xy^2z$;

b) $u(x, y) = \sqrt{12 + x^2 + y^2}$;

c) $u(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2$;

d) $u(\mathbf{r}) = \mathbf{n}\mathbf{r}$, ahol $\mathbf{n}$ állandó vektor;

e) $u(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{r})$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ állandó vektorok.

4. Adja meg az $u(x, y, z) = x^3y + y^2z$ függvény gradiensét és iránymenti deriváltját az $\mathbf{r}_0(2, 1; 3)$ pontban, az $\mathbf{a}(1; 2; -2)$ vektor irányában.

C. Vektor-vektor-függvények

5. Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ vektormező deriválttenzorát, divergenciáját és rotációját.

6. Adja meg a következő vektormezők divergenciáját és rotációját!

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy - x^2)\mathbf{i} + (2yz - y^2)\mathbf{j} + (2zx - z^2)\mathbf{k}$;

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$;

c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$;

d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$, ahol $\mathbf{c}$ konstans vektor.

D. Vektormezők vonalintegrálja

7. Határozza meg az $\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ vektortérnek az $A(1; 2; 5)$ és a $B(4; 7; 9)$ pontokat összekötő egyenesszakaszra vett vonalintegrálját!

8. Határozza meg az $\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + zx\mathbf{k}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ vektortérnek az $L_1 = \{\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1\}$; $L_2 = \{\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_1 = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1\}$.

9. Határozza meg az $\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto x^3y\mathbf{i} + \frac{x}{2+y}\mathbf{j} + zx\mathbf{k}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, y \neq -2$ vektortérnek az $L = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

E. Felületi integrál

10. Határozza meg a $\iint_F \mathbf{r} dA$ értékét az $A(1; 1; 3), B(4; 2; 7)$ és $C(5; 4; 9)$ csúcspontú háromszögre.

11. Határozza meg a $\mathbf{B}: \mathbf{j} \times \mathbf{r}$ vektortér felületi integrálját az $x^2 + z^2 = 1$ hengerfelület $0 \leq y \leq 1$ részére.