

A. HÁRMAS, AVAGY TÉRFOGATI INTEGRÁL

1. Határozza meg az a, b, c élhosszúságú téglatest térfogatát!
2. Határozza meg hengerkoordináták alkalmazásával az r sugarú és m magasságú henger térfogatát!
3. Számítsa ki az $f(\mathbf{r}) = x^2 + 4yz$ függvény egységkockára vonatkozó térfogati integrálját!
4. Számítsa ki a következő hármas integrálokat!

a) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 dx dy dz,$

c) $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 xyz dx dy dz.$

b) $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x + y + z) dx dy dz,$
5. Határozza meg az egységnyi élhosszúságú kocka tömegét, ha tömegeloszlása

$$\rho(x, y, z) = x + y + z.$$

B. INTEGRÁLTÉTELEK: A GAUSS–OSZTROGRADSKIJ- ÉS A STOKES-TÉTEL

6. A Gauss–Osztrogradskij-tétel segítségével határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^4 y^3 z^2 \mathbf{i} + xz^4 \mathbf{j} + x^3 y^{10} \mathbf{k}$ vektormezőnek az egységkocka felszínére vett felületi integrálját!
7. Vizsgálja, miképp teljesül a Stokes-tétel a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$ vektormezőben az $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0; 1; 0)$ pontok meghatározta négyzet kontúrvonalára és területére.

C. NUMERIKUS SOROK

8. Határozza meg a következő sorok összegét, amennyiben konvergensek

a) $10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{10}{2^{n-1}} + \dots,$

b) $2 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \dots,$

c) $-4 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \dots - \frac{4}{5^{n-1}} + \dots,$

d) $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots,$

e) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots,$

f) $\frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n+3) \cdot (2n+5)} + \dots.$
9. Vizsgálja, hogy a következő sorok konvergensek-e!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!},$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1},$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$

D. FÜGGVÉNYSOROK

10. Határozza meg a következő függvénysorozatok konvergenciatartományát és határfüggvényét!

a) $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots;$

c) $g_n = \frac{1}{x^2 + n};$

b) $f_n = \frac{1}{x^n};$

d) $h_n = \ln^n x.$
11. Határozza meg a következő függvénysorok konvergenciatartományát!

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{x};$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt{1+x^2}};$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k};$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^k}.$