

1. Vizsgálja a következő sorok konvergenciáját!

a) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$

b) $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} + \dots$

c) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$

2. Vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját a hányadoskritériummal.

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{n}{5^n} + \dots$

b) $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{3^n} + \dots$

c) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} + \dots$

3. Vizsgálja az adott sorok konvergenciáját a gyökkritériummal.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$

b) $\sum \frac{2^{n-1}}{n^n}$

c) $\sum \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^n$

4. A Leibniz-kritérium alapján vizsgálja az adott alternáló sorok konvergenciáját.

a) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots$

b) $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{9}{10} - \frac{16}{17} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} + \dots$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2+1} + \dots$

d) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

5. Vizsgálja az integrálkritériummal az alábbi sorok konvergenciáját!

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{4n^2} + \dots$

c) $\frac{60}{1 \cdot 2} + \frac{60}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{60}{n(n+1)} + \dots$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \dots$

6. Határozza meg az adott hatványsor konvergenciaintervallumát

a) $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n + \dots$

b) $1 + 1!x + 2!x^2 + \dots + n!x^n + \dots$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot x^n$

7. Fejtse hatványsorba a következő függvényeket! Adja meg a konvergenciaintervallumukat.

a) $\frac{3}{x+1}$

b) $\frac{1}{2-x}$

c) $\frac{x}{5+x}$

d) $\frac{2x}{1-x^2}$

8. Írja fel a következő függvények 0 körüli Taylor-sorfejtését.

a) e^x

g) $\ln(1+x)$

b) 2^x

h) $\cos 5x$

c) $\sin x$

i) $\sin 5x$

d) $\cos x$

j) $\frac{1}{x^2-5x+6}$

e) $\sin^2 x$

f) $\cos^2 x$