

TÉTEL (Elégséges feltétel Fourier-sor pontonkénti konvergenciájára):

Ha f 2π szerint **periodikus**, a $[-\pi, \pi]$ intervallumon **Riemann-integrálható** függvény, és valamely $x \in \mathbb{R}$ helyen f -nek $\exists$ **véges bal- és jobb oldali határértéke**, továbbá léteznek $K \geq 0$ és $\delta > 0$ valós számok, hogy minden $t \in (0, \delta)$ esetén

$$\left| f(x+t) - \lim_{x \rightarrow 0} f \right| \leq K \cdot t \quad \text{és} \quad \left| f(x-t) - \lim_{x \rightarrow 0} f \right| \leq K \cdot t,$$

akkor az x helyen f **Fourier-sora konvergens**,

és összege az x -beli **véges egyoldali határértékek számtani közepe**:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} f + \lim_{x \rightarrow 0} f \right),$$

(ahol $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$, $a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos nt dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin nt dt$, ($n \in \mathbb{N}$) az u.n. **Fourier - együtthatók**).

Következmény:

- Ha f az x helyen balról és jobbról is differenciálható, akkor Fourier-sora az x helyen konvergens, és előállítja a függvényt.
- Ha f -nek az x helyen elsőfajú szakadása van, és a balról ill. jobbról folytonossá tett módosításai balról ill. jobbról differenciálhatók, akkor Fourier-sora az x helyen konvergens, és összege az x -beli véges egyoldali határértékek számtani közepe.

Megjegyezzük, hogy a függvény folytonossága a Fourier-sor konvergenciájának sem nem szükséges, sem nem elégséges feltétele !!!

A tétel alkalmazásaként bemutatunk néhány egyszerű feladatot:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ha $x \in [0, 2\pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$;

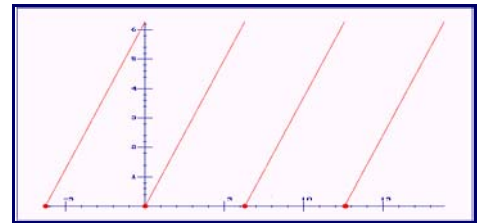
f Fourier-sora $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ esetén előállítja a függvényt (2. következmény).

f **Fourier-együtthatói:** $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} t \cdot \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \left[\frac{t}{n} \cdot \sin nt \right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \cdot \sin nt dt \right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{n^2} \cdot \cos nt \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} t \cdot \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \left[-\frac{t}{n} \cdot \cos nt \right]_{t=0}^{t=2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \cdot \cos nt dt \right\} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} = -\frac{2}{n};$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad f(x) = \pi - 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin nx.$$



- $f := \arccos \circ \cos$, azaz $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$;

f Fourier-sora $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén előállítja a függvényt (az 1. következmény alapján).

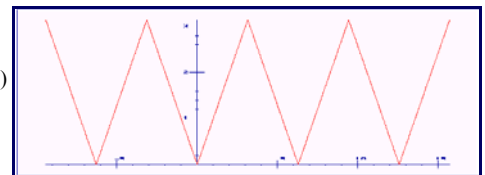
f **Fourier-együtthatói:** $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = 0$, u.i. f páros fgv. (így Fourier-sora tiszta cosinus-sor)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} t \cdot \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \left[\frac{t}{n} \cdot \sin nt \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cdot \sin nt dt \right\} = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{n^2} \cdot \cos nt \right]_{t=0}^{t=\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_n = 0, \text{ ha } n \text{ páros,} \quad \text{és} \quad a_n = -\frac{4}{\pi n^2}, \text{ ha } n \text{ páratlan.}$$

Így tehát $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \cos(2n+1) \cdot x$. **Megj.:** $x = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$



3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := (\pi - |x|)^2$, ha $x \in [-\pi, \pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) = f(x)$;

f Fourier-sora $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén előállítja a függvényt (1. következmény alapján).

f Fourier-együtthatói: $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = 0$, u.i. f páros függvény (így Fourier-sora tiszta cosinus-sor);

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (\pi - t)^2 dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (\pi - t)^2 \cdot \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \left[\frac{(\pi-t)^2}{n} \cdot \sin nt \right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2(\pi-t)}{n} \cdot \sin nt dt \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \left[-\frac{2(\pi-t)}{n^2} \cdot \cos nt \right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2}{n^2} \cdot \cos nt dt \right\} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2} \Rightarrow$$

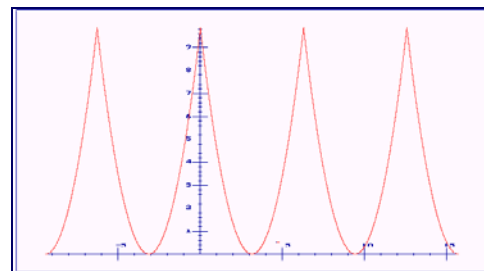
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \cos nx.$$

Megj.: $x = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, melyből $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ugyanezt a 2. alatti feladat kapcsán is megkaphattuk volna, hiszen $A := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ és az $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ sorösszegekből

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \cdot A, \quad \text{melyből} \quad A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$



4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$.

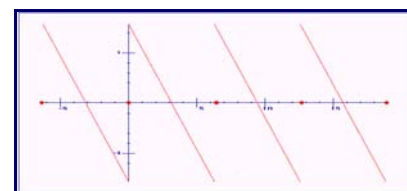
f Fourier-sora $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén előállítja a függvényt (a 2. következmény alkalmazható).

f Fourier-együtthatói: $a_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$, u.i. f páratlan függvény (így Fourier-sora tiszta sinus-sor);

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\pi-t}{2}}_u \cdot \underbrace{\sin nt}_{v' \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nt} dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \left[\frac{t-\pi}{2n} \cdot \cos nt \right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2n} \cdot \cos nt dt \right\} = \frac{1}{n},$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin nx.$$

Megj.: Ugyanezt az 1. alatti sorfejtésből egyszerűbben is megkaphattuk volna!

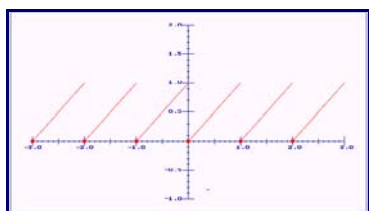


5. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := x - [x]$; (többrész függvény, 1 szerint periodikus).

A 2π szerint periodikus $h := g \circ \frac{\text{id}}{2\pi}$ függvény Fourier-sora az 1. feladatbeli f fgv. sorából könnyen meghatározható (felhasználva,

hogy $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 2\pi \cdot (-\frac{x}{2\pi} - [-\frac{x}{2\pi}]) = 2\pi \cdot h(x)$, s így $\forall x \in \mathbb{R}$ $h(x) = \frac{x}{2\pi} - [-\frac{x}{2\pi}] = \frac{1}{2\pi} \cdot f(x)$):

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin nx, \quad \text{melyből} \quad g(x) = h(2\pi x) \quad \text{miatt}$$



$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin (2n\pi \cdot x).$$