

1. Írja fel és ábrázolja a következő sorozatok első hat elemét; vizsgálja korlátosságukat, monotonitásukat!

a) $a_n = 5n + 1$;

e) $e_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$;

b) $b_n = \sin n \frac{\pi}{2}$;

f) $f_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{2+4+6+\dots+2n}$;

c) $c_n = 2 + \frac{(-1)^n}{2n}$;

g) $g_n = \sqrt[n]{n}$;

d) $d_n = \frac{n^3+1}{n^2-2}$;

h) $h_n = \sqrt[n]{n!}$.

2. Határozza meg az $X = \{0; 0,1; 0,12; 0,123; 0,1234; \dots\}$ halmaz infimumát és szuprémumát.

3. Igazolja teljes indukcióval, hogy

a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Iktasson be a 8 és az 50 közé nyolc számot úgy, hogy a tíz darab szám számtani sorozatot alkosson! Mennyi ezen tíz szám összege? Végezze el ugyanezeket mértani sorozattal.

5. Adjon zárt formulát a következő összegekre!

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$;

b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

6. Adjon meg három, öt, majd n db racionális számot a következő A középpontú, ε sugarú környezetekben!

a) $A = 5, \varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$;

b) $A = -\frac{3}{2}, \varepsilon = 10^{-9}$;

c) $A = 1984, \varepsilon = 3 \cdot 10^{-12}$.

7. Határozza meg a következő sorozatok határértékét! Adja meg a küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-2}$ és $\varepsilon = 10^{-6}$ hibakorlátokhoz.

a) $\frac{n+3}{2n-5}$;

c) $\frac{4^{n+1}-1}{4^n}$;

b) $\frac{1-6n}{7n+2}$;

d) $\frac{6^n}{5^{n-1}}$.

8. Adjon meg olyan (i) monoton, (ii) nem monoton sorozatot, amelynek a határértéke a $\frac{2}{3}$!

9. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$;

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-\sqrt{2}}{5n}\right)^n$.