

A. DERIVÁLÁSI SZABÁLYOK

1. A konstansszorosra, az összeg- és különbségfüggvényre, valamint a szorzat- és hányadosfüggvényre vonatkozó szabályok ismeretében deriválja az alábbi függvényeket.

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|---|
| a) $f(x) = -3x^2 + 7x + 9;$ | e) $j(x) = x^3 \cdot \cos x;$ | i) $n(x) = \frac{\ln x}{x};$ |
| b) $g(x) = 4x^{-3} - 5x^{-2} + x;$ | f) $k(x) = \tan x;$ | j) $o(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 + x - 3}{6x^{11} + 3x^7 + 5};$ |
| c) $h(x) = 2 \sin x - 3 \cos x;$ | g) $l(x) = \sin x \cdot \cos x;$ | |
| d) $i(x) = 4 \ln x - \cosh x;$ | h) $m(x) = \cot x;$ | |

2. Alkalmazza az összetett függvényekre vonatkozó deriválási szabályt!

- | | |
|---|---|
| a) $a(x) = (3x - 2)^5;$ | e) $e(x) = \ln \sqrt{x};$ |
| b) $b(x) = \sqrt{2x^3 - 5x^2 - x + 2};$ | f) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}};$ |
| c) $c(x) = \sin^2 x;$ | g) $g(x) = \ln(3\sqrt{x^3 + x^2 - x + 2}).$ |
| d) $d(x) = \cos^5(\pi - 2x);$ | |

B. FÜGGVÉNYDERIVÁLT ÉS MONOTONITÁS

3. Keresse meg a következő függvények deriváltjainak zérushelyeit.

- | | | |
|----------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = 3;$ | d) $i(x) = -x^2 + 5x;$ | g) $l(x) = \sqrt{2x + 6}$ |
| b) $g(x) = 2x - 3;$ | e) $j(x) = x^3 - 4x^2;$ | h) $m(x) = \frac{1}{2x+1};$ |
| c) $h(x) = x^2 - 5;$ | f) $k(x) = (x + 2)^3 - 6;$ | i) $n(x) = \sin(3x^2).$ |

4. Vizsgálja az első derivált segítségével az alábbi függvények monotonitását!

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $y = 1,001x - 3;$ | e) $y = \frac{1}{x^2};$ |
| b) $y = 3x^2 + 2;$ | f) $y = \frac{1}{x^2 - x - 2};$ |
| c) $y = -x^2 + 2x + 5;$ | g) $y = \sin 2x.$ |
| d) $y = -x^3 - 3x^2 + 4x + 5;$ | |

C. DERIVÁLT ÉS SZÉLSŐÉRTÉK

5. Döntse el a deriváltak segítségével, hogy van-e, s ha igen, hol és milyen szélsőértéke az alábbi függvényeknek.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $f(x) = -3x^2 + 7x + 9;$ | f) $k(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$ |
| b) $g(x) = x^2 - 2x + 3;$ | g) $l(x) = \sin x \cdot \cos^2 x;$ |
| c) $h(x) = 2x^3 + 15x^2 - 84x + 106;$ | h) $m(x) = \frac{\sin x}{2 - \sin x};$ |
| d) $i(x) = \frac{x}{x^2 + 1};$ | i) $n(x) = x \cdot \ln x;$ |
| e) $j(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 4};$ | j) $o(x) = e^x - e^{-x}.$ |

6. Diszkutálja az alábbi függvényeket!

- | | |
|-------------------------------|--|
| a) $a(x) = x^2 - x - 2;$ | e) $e(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3};$ |
| b) $b(x) = \sqrt{4 - x^2};$ | f) $f(x) = \frac{e^x}{x};$ |
| c) $c(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x;$ | g) $g(x) = x^x.$ |
| d) $d(x) = x^5 - x^3$ | |

D. LOGARITMIKUS DIFFERENCIÁLÁS. AZ INVERZ FÜGGVÉNY ÉS ANNAK DERIVÁLTJA. L'HOSPITAL-SZABÁLY

7. Alkalmazza a logaritmikus differenciálás módszerét!

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = e^{x^2};$ | d) $i(x) = x^{\cos x};$ |
| b) $g(x) = (5 - 2x)^x;$ | e) $j(x) = x^{x^2 + 2x - 3};$ |
| c) $h(x) = (6 - x^2)^{x^2};$ | f) $k(x) = x^{\sqrt{5 - x^2}}.$ |

8. Adja meg a következő függvények inverzét, majd deriválja azt az inverz függvényre vonatkozó szabály segítségével.

- | | |
|----------------------|---------------------|
| a) $f(x) = x^3;$ | d) $i(x) = \sin x;$ |
| b) $g(x) = x^4;$ | e) $j(x) = \cos x.$ |
| c) $h(x) = x^2 - 4;$ | |

9. Alkalmazza a L'Hospital-szabályt a következő határértékek meghatározásához.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1};$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x};$ | i) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x;$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x}{x-2};$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x^2};$ | j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x};$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x-1};$ | g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a^n};$ | k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{7x^3 + 5x - 3};$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x};$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x};$ | l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}.$ |