

Halmazok

Definíciók

1. Halmazok egyenlősége

Két halmaz akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik. Formálisan, ha A és B halmazok, akkor:

$$A = B \iff \forall x \in A, x \in B \wedge \forall y \in B, y \in A$$

Ez azt jelenti, hogy A minden eleme B -nek is eleme, és fordítva, B minden eleme A -nak is eleme.

Példa: Ha $A = \{1; 2; 3\}$ és $B = \{3; 2; 1\}$, akkor $A = B$, mivel ugyanazok az elemek vannak mindkét halmazban, csak más sorrendben.

2. Részhalmaz-viszony

Egy A halmaz részhalmaza egy B halmaznak, ha A minden eleme B -nek is eleme. Ezt így jelöljük:

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A, x \in B$$

Azaz minden x , ami A -nak eleme, B -nek is eleme.

Példa: Ha $A = \{1; 2\}$ és $B = \{1; 2; 3\}$, akkor $A \subseteq B$, mert A minden eleme megtalálható B -ben.

3. Valódirészhalmaz-viszony

Egy A halmaz valódi részhalmaza egy B halmaznak, ha A részhalmaza B -nek, de A nem egyenlő B -vel. Ezt így jelöljük:

$$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Azaz A minden eleme benne van B -ben, de B -nek van olyan eleme, amely nincs benne A -ban ($\exists y \in B, y \notin A$).

Példa: Ha $A = \{1; 2\}$ és $B = \{1; 2; 3\}$, akkor $A \subset B$, mert A részhalmaza B -nek, de nem egyenlő vele (mivel $3 \in B$, de $3 \notin A$).

4. Halmazok uniója

Két halmaz uniója az a halmaz, amely tartalmazza mindazokat az elemeket, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak. Ha A és B halmazok, akkor az uniójuk:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

Azaz $A \cup B$ azokból az elemekből áll, amelyek A -nak vagy B -nek (vagy mindkettőnek) elemei.

Példa: Ha $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$, akkor $A \cup B = \{1; 2; 3\}$.

5. Halmazok metszete

Két halmaz metszete az a halmaz, amely tartalmazza mindazokat az elemeket, amelyek mindkét halmazban benne vannak. Ha A és B halmazok, akkor a metszetük:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

Azaz $A \cap B$ azokból az elemekből áll, amelyek A -nak és B -nek is elemei.

Példa: Ha $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$, akkor $A \cap B = \{2\}$.

Két halmaz diszjunkt, ha nincs közös elemük, azaz a metszetük az üres halmaz: $A \cap B = \emptyset$.

6. Halmazok különbsége

Az A és B halmazok különbsége (ebben a sorrendben) az a halmaz, amely tartalmazza azon elemeket A -nak, amelyek nem elemei B halmaznak. Ha A és B halmazok, akkor a metszetük:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

Azaz $A \setminus B$ azokból az elemekből áll, amelyek csak az A -nak elemei a két halmaz közül.

Példa: Ha $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$, akkor $A \setminus B = \{1\}$. A halmazok különbsége nem felcserélhető (nem kommutatív) művelet, mert általában

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

7. Halmaz komplementere

Legyen adott a H (alap-)halmaz és annak A részhalmaza ($A \subseteq H$). Az A halmaz komplementerhalmazán (kiegészítő halmazán) a H halmaz azon elemeinek halmazát értjük, amelyek nem elemei az A halmaznak.

$$\overline{A} = \{x \in H, x \notin A\}$$

Azaz $\overline{A}$ azokból az elemekből áll, amelyek uniója A -val a H (alap-)halmazt adja, vagyis egészíti ki arra: innen a komplementer, 'kiegészítő' elnevezés.

Példa: Ha $H = \{1; 2; 3\}$ és $A = \{2; 3\}$, akkor $\overline{A} = \{1\}$.