

**Óbudai Egyetem
Alba Regia Egyetemi Központ**

Makó Margit

Laplace-transzformáció és alkalmazása

ÓE AREK 8008
Budapest, 2013.

Lektor: Dr. Lakner József

ISBN 978-615-5018-60-2

Felelős kiadó: Dr. Györök György, az ÓE AREK főigazgatója

Műszaki vezető: Bélteky István

Jegyzetszám: ÓE AREK-8008

Tartalomjegyzék

1.1.	A Laplace-transzformáció fogalma	5
1.2.	A Laplace-integrál konvergenciája	6
1.3.	A Laplace-transzformáció tulajdonságai	6
1.4.	Néhány fontos függvény Laplace-transzformáltja	6
1.4.1.	Konstans függvény Laplace-transzformáltja	7
1.4.2.	Exponenciális függvény Laplace-transzformáltja	7
1.4.3.	Trigonometrikus függvény Laplace-transzformáltja	8
1.4.4.	Hiperbolikus függvények Laplace-transzformáltja	9
1.4.5.	Pozitív egész kitevős hatványfüggvény Laplace-transzfor- máltja	10
1.4.6.	Exponenciális függvénnyel szorzott függvény Laplace-transz- formáltja	11
1.4.7.	Pozitív egész kitevős hatványfüggvénnyel szorzott függ- vény Laplace-transzformáltja	13
1.4.8.	Eltolási tétel	14
1.4.9.	Derivált függvény Laplace-transzformáltja	15
1.5.	Inverz Laplace-transzformáció	17
1.6.	Laplace-transzformáció alkalmazása differenciálegyenletek meg- oldására	21
Irodalomjegyzék		26

Laplace-transzformáció

Pierre Simon **Laplace** (1749-1827) francia matematikus, csillagász és fizikus nevéhez fűződik az a transzformációs eljárás, amely segítségével számos fizikai, műszaki illetve matematikai feladat megoldásánál a hosszadalmas számolások, integrálások leegyszerűsödnek. Ezzel a módszerrel bizonyos típusú differenciálegyenletek, differenciálegyenlet-rendszerek bonyolult integrálásokkal való megoldása algebrai egyenletek, egyenletrendszerek megoldására vezethető vissza.

1.1. Fogalma

A Laplace-transzformációval egy függvényhez, egy improprius integrál segítségével, egy másik függvényt rendelünk. Mivel a gyakorlatban előforduló folyamatokat leíró függvények nagy része a változó nem negatív értékeire értelmezett függvény, ez indokolja, hogy a Laplace-transzformációt $[0; +\infty[$ -ban intervallumban értelmezett függvényekre definiáljuk. Ha $f(t)$ függvény a változó negatív értékeire is értelmezett, akkor a függvényértékeket ezeken a helyeken nullának tekintjük.

Definíció:

Legyen $f(t)$ a $[0; +\infty[$ -ban értelmezett egyváltozós valós függvény. Ha $f(t)$ integrálható a $[0; +\infty[$ bármely véges részintervallumán és s valós változót jelent, akkor az

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (1.1)$$

függvényt az $f(t)$ **Laplace-transzformáltjának** nevezzük mely azon s helyeken van értelmezve, amelyekre az improprius integrál konvergens.

Az $f(t)$ függvényt szokták **eredeti függvénynek**, vagy **generátorfüggvénynek** nevezni. A transzformációt előállító improprius integrált **Laplace-integrálnak** nevezzük.

Jelölés: A Laplace-transzformált jelölésére $F(s)$ helyett szokásos az $\bar{f}(s)$ használata is, vagy ha az $f(t)$ függvényt is fel akarjuk tüntetni, akkor az $L[f(t)]$ jelölést alkalmazzuk.

Megjegyzés: A műszaki tudományokban a Laplace-transzformáltat általánosan, az $f(t)$ valós változójú, komplex értékű függvényre is értelmezik, ekkor a Laplace-integrálban az s komplex változót jelent. A későbbiekben leírtak ebben az esetben is érvényesek, de mi ebben a jegyzetben s -et valós változónak tekintjük.

1.2. A Laplace-integrál konvergenciája

Az integrál és így az $F(s)$ függvény sem létezik minden s szám esetén. A konvergencia részletes vizsgálata nélkül, csak egy elégséges feltételt adunk a Laplace-integrál konvergenciájára a tétel teljesen pontos megfogalmazása nélkül. Ha megadhatók olyan $K > 0$, $c > 0$ valós számok, hogy $|f(t)| \leq Ke^{ct}$ bármely $t \in [0; +\infty[$ esetén, akkor a Laplace-integrál $s > c$ esetén konvergens. Tehát ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy a Laplace-integrál vagy minden s -re konvergens, vagy egyetlen s -re sem, vagy van olyan $c > 0$ szám, hogy $s > c$ esetén konvergens, egyébként divergens.

1.3. A Laplace-transzformáció tulajdonságai

A Laplace-transzformáció arány- és összegtartó, ami azt jelenti, hogy a konstans szorzó kiemelhető a transzformálás jele elé, valamint összegnek tagonként vehetjük a Laplace-transzformáltját. Azaz, ha $f(t)$ -nek, $f_1(t)$ -nek és $f_2(t)$ -nek létezik Laplace-transzformáltja, akkor $cf(t)$ -nek, ahol c tetszőleges valós szám, valamint $f_1(t) \pm f_2(t)$ -nek is létezik Laplace-transzformáltja, és

$$L[cf(t)] = cL[f(t)] \quad (1.2)$$

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = L[f_1(t)] \pm L[f_2(t)]. \quad (1.3)$$

1.4. Néhány fontos függvény Laplace-transzformáltja

Ebben a fejezetben elemi függvények Laplace-transzformáltjaira vonatkozó állításokat fogjuk a definíció alapján belátni, illetve kiszámítani.

1.4.1. Konstans függvény Laplace-transzformáltja

Állítás:

$$\begin{aligned} f(t) &= c, \quad c \in \mathbb{R} \\ L[c] &= \frac{c}{s}, \quad \text{ha } 0 < s, \end{aligned} \quad (1.4)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} L[c] &= \int_0^{+\infty} c e^{-st} dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\omega} c e^{-st} dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} c \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\omega} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} c \left(-\frac{e^{-s\omega}}{s} + \frac{e^0}{s} \right) = \frac{c}{s}, \quad \text{mivel } 0 < s \text{ esetén } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} e^{-s\omega} = 0 \end{aligned}$$

Példa:

$$L[-4] = \frac{-4}{s}$$

1.4.2. Exponenciális függvény Laplace-transzformáltja

Állítás:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{at}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ L[e^{at}] &= \frac{1}{s-a}, \quad \text{ha } s > |a|, \end{aligned} \quad (1.5)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} L[e^{at}] &= \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\omega} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\omega} e^{(a-s)t} dt = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\omega} e^{(a-s)t} dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^{\omega} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{(a-s)\omega}}{a-s} - \frac{e^0}{a-s} \right) = \frac{1}{s-a}$$

mert $s > |a|$ esetén $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{(a-s)\omega}}{a-s} \right) = 0$

Példa:

$$L[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$$

$$L[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$$

1.4.3. Trigonometrikus függvény Laplace-transzformáltja

Állítás:

$$f(t) = \sin at, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \text{ha } s > 0. \quad (1.6)$$

Bizonyítás:

$$L[\sin at] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin at dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\omega} e^{-st} \sin at dt =$$

parciális integrálással

$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[-\frac{a}{s^2 + a^2} e^{-st} \cos at - \frac{s}{s^2 + a^2} e^{-st} \sin at \right]_0^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{a}{s^2 + a^2} e^{-s\omega} \cos a\omega - \frac{s}{s^2 + a^2} e^{-s\omega} \sin a\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{s^2 + a^2} e^0 \cos 0 + \frac{s}{s^2 + a^2} e^0 \sin 0 \right) = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

felhasználva, hogy $s > 0$ esetén $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} e^{-s\omega} = 0$ és $\sin a\omega$,
valamint $\cos a\omega$ is korlátos.

Állítás:

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos at, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ L[\cos at] &= \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \text{ha } s > 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Bizonyítás:

Az előző állításhoz hasonlóan lehet belátni ezt is.

Példa:

$$\begin{aligned} L[\sin 2t] &= \frac{2}{s^2 + 4} \\ L[\cos \frac{3}{2}t] &= \frac{s}{s^2 + \frac{9}{4}} \end{aligned}$$

1.4.4. Hiperbolikus függvények Laplace-transzformáltja

Állítás:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sh} at, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ L[\operatorname{sh} at] &= \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \text{ha } s > 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Bizonyítás:

Definíció alapján

$$\operatorname{sh} at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}.$$

Ezek után felhasználva az exponenciális függvényre vonatkozó (1.5) állítást

$$L[\operatorname{sh} at] = L\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{s^2 - a^2} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Állítás:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{ch} at, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ L[\operatorname{ch} at] &= \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \text{ha } s > 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Bizonyítás:

Definíció alapján

$$\text{chat} = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2},$$

így hasonlóan az előző (1.8) állítás bizonyításához

$$L[\text{chat}] = L\left[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{s^2 - a^2} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Példa:

$$L[\text{sh}4t] = \frac{4}{s^2 - 16}$$

$$L[\text{ch}\frac{2}{3}t] = \frac{s}{s^2 - \frac{4}{9}}$$

1.4.5. Pozitív egész kitevős hatványfüggvény Laplace-transzformáltja

Állítás:

$$f(t) = t^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{ha } s > 0. \quad (1.10)$$

Bizonyítás:

Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n = 0$ akkor a transzformálandó függvény azonosan 1, ezért

$$L[t^n] = \frac{1}{s} \quad \text{ha } n = 0 \text{ és } s > 0. \quad (1.11)$$

Ha $n > 0$

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\omega} t^n e^{-st} dt =$$

a parciális integrálás módszerét használva:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{t^n e^{-st}}{-s} \right]_0^{\omega} + \frac{n}{s} \int_0^{\omega} t^{n-1} e^{-st} dt \right) = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{\omega^n e^{-s\omega}}{-s} \right] + \frac{n}{s} \int_0^{\omega} t^{n-1} e^{-st} dt \right) = \end{aligned}$$

a L'Hospital-szabályt n-szer alkalmazva belátható,

hogy $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\omega^n e^{-s\omega}) = 0$. így az eredmény:

$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{s} \int_0^{\omega} t^{n-1} e^{-st} dt \right) = \frac{n}{s} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\omega} t^{n-1} e^{-st} dt \right)$$

Azaz

$$L[t^n] = \frac{n}{s} L[t^{n-1}]. \quad (1.12)$$

Ezt a képletet és az $n = 0$ esetre kapott (1.11) alapján teljes indukcióval adódik az eredmény, miszerint

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ minden nem negatív } n\text{-re, ha } s > 0. \quad (1.13)$$

Példa:

$$\begin{aligned} L[t^2] &= \frac{2!}{s^3} \\ L[t^5] &= \frac{5!}{s^6} \end{aligned}$$

1.4.6. Exponenciális függvénnel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

Állítás:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot e^{at}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ L[g(t)] &= L[f(t) \cdot e^{at}] = \bar{f}(s - a) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Bizonyítás:

Az (1.1) definíció alapján $L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \bar{f}(s)$.

Ezt alkalmazva $g(t)$ -re:

$$L[g(t)] = L[f(t) \cdot e^{at}] = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(s-a)t} dt = \bar{f}(s-a)$$

Tehát az ilyen függvények Laplace-transzformáltját a következő lépésekkel határozhatjuk meg:

- Az $f(t)$ függvénynek felírjuk a Laplace-transzformáltját az $\bar{f}(s)$ -t .
- Az $\bar{f}(s)$ függvényben minden s helyére $(s-a)$ -t írva megkapjuk a keresett függvény Laplace-transzformáltját.

Példa:

1.

$$g(t) = e^{2t} \cos 3t$$

$$f(t) = \cos 3t, \text{ melynek a transzformáltja: } \bar{f}(s) = \frac{s}{s^2 + 9}.$$

Ebben minden s helyére $(s-2)$ -t írva

$$L[e^{2t} \cos 3t] = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9}.$$

2.

$$g(t) = e^{-3t} \sin 2t$$

$$f(t) = \sin 2t, \text{ melynek a transzformáltja: } \bar{f}(s) = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Ebben minden s helyére $(s+3)$ -at írva

$$L[e^{-3t} \sin 2t] = \frac{2}{(s+3)^2 + 9}.$$

1.4.7. Pozitív egész kitevős hatványfüggvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

Állítás:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot t^n, \quad \text{ahol } n = 1, 2, \dots \\ L[g(t)] &= L[f(t) \cdot t^n] = (-1)^n \cdot \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Bizonyítás:

Induljunk ki az (1.1) definícióból:

$$L[f(t)] = \bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt.$$

Deriválva az integrált s szerint

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot (-t) \cdot e^{-st} dt = - \int_0^{+\infty} f(t) \cdot t \cdot e^{-st} dt = -L[f(t) \cdot t]$$

Ebből az egyenletből rendezéssel

$$L[f(t) \cdot t] = (-1)^1 \cdot \frac{d\bar{f}(s)}{ds}$$

egyenletet kapjuk. Tehát ez a $g(t)$ függvény Laplace-transzformáltja. Ha az (1.1) egyenletet n-szer deriváljuk

$$\begin{aligned} \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n} &= \int_0^{+\infty} f(t) \cdot (-t)^n \cdot e^{-st} dt \\ &= (-1)^n \int_0^{+\infty} f(t) \cdot t^n \cdot e^{-st} dt = (-1)^n L[f(t) \cdot t^n] \end{aligned}$$

Melyből rendezéssel a keresett összefüggést kapjuk

$$L[f(t) \cdot t^n] = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n} \quad (1.16)$$

Ezek alapján a hatványfüggvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltját a következő lépésekkel határozzuk meg:

- Az $f(t)$ függvénynek felírjuk a Laplace-transzformáltját az $\bar{f}(s)$ -et .
- kiszámítjuk $\bar{f}(s)$ s szerinti n-edik deriváltját
- az így kapott kifejezést szorozzuk $(-1)^n$ -nel, és ez lesz a keresett Laplace-transzformált.

Példa:

1.

$$g(t) = t \cdot \cos 3t$$

$$f(t) = \cos 3t, \text{ melynek a transzformáltja: } \bar{f}(s) = \frac{s}{s^2 + 9}.$$

Mivel t az első hatványon szerepel, ezért ezt egyszer deriváljuk.

$$\left(\frac{s}{s^2 + 9} \right)' = \frac{(s^2 + 9) - 2s^2}{(s^2 + 9)^2} = \frac{9 - s^2}{(s^2 + 9)^2}.$$

A keresett Laplace-transzformáltat ennek a (-1)-szereseként kapjuk meg.

$$L[t \cdot \cos 3t] = -\frac{9 - s^2}{(s^2 + 9)^2} = \frac{s^2 - 9}{(s^2 + 9)^2}$$

2.

$$g(t) = t^2 \cdot \sin 2t$$

$$f(t) = \sin 2t \text{ transzformáltja } \bar{f}(s) = \frac{2}{s^2 + 4}, \text{ melyet 2-szer kell deriválni.}$$

$$\left(\frac{2}{s^2 + 4} \right)'' = \left(\frac{-4s}{(s^2 + 4)^2} \right)' = \left(\frac{12s^2 - 16}{(s^2 + 4)^3} \right).$$

Mivel t-nek a második hatványa szerepel, ezért ezt (-1) második hatványával, tehát 1-gyel kell megszorozni, így

$$L[t^2 \cdot \sin 2t] = \frac{12s^2 - 16}{(s^2 + 4)^3}.$$

1.4.8. Eltolási tétel

Állítás:

Ha a $[0; +\infty)$ intervallumon értelmezett $f(t)$ függvénynek van Laplace-transzformáltja, és $a > 0$ valós szám, akkor a

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq t < a \\ f(t-a), & \text{ha } a \leq t \end{cases}$$

függvénynek is van Laplace- transzformáltja, és

$$L[g(t)] = L[f(t-a)] = e^{-sa} \cdot \bar{f}(s) \quad (1.17)$$

Ez az eredeti függvényre vonatkozó eltolási tétel.

Bizonyítás:

Mivel $t < 0$ esetén $f(t) = 0$, $t < a$ esetén $f(t-a) = 0$, így

$$L[f(t-a)] = \int_0^{+\infty} f(t-a) \cdot e^{-st} dt = \int_a^{+\infty} f(t-a) \cdot e^{-st} dt =$$

helyettesítéses integrállal, ahol $u = t - a$

$$L[f(t-a)] = \int_0^{+\infty} f(u) \cdot e^{-s(u+a)} du = e^{-sa} \cdot \int_0^{+\infty} f(u) \cdot e^{-su} du = e^{-sa} \cdot \bar{f}(s),$$

amint azt állítottuk.

Példa:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq t < 4 \\ \cos(t-4), & \text{ha } 4 \leq t \end{cases}$$

A $g(t)$ függvényt az $f(t) = \cos t$ függvényből kapjuk 4 egységgel pozitív irányba való eltolással. $g(t) = f(t-4)$

$$\text{Így az 1. lépés: } L[f(t)] = \bar{f}(s) = L[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\text{és a 2. lépés: } L[g(t)] = e^{-4t} \cdot \bar{f}(s) = e^{-4t} \frac{s}{s^2 + 1}$$

1.4.9. Derivált függvény Laplace-transzformáltja

Állítás:

Ha $f(t)$ függvénynek létezik Laplace-transzformáltja és $f(t)$ legalább n -szer deriválható ($n \geq 1$), akkor $f(t)$ függvény n -edik deriváltjának Laplace-transzformáltja

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot \bar{f}(s) - s^{(n-1)} \cdot f(0) - s^{(n-2)} \cdot f'(0) - \dots - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Bizonyítás:

Az $n = 1$ -re a definíció alapján számítsuk ki az $f'(t)$ Laplace-transzformáltját!

$$\begin{aligned}
 L[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} f'(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\omega} f'(t) \cdot e^{-st} dt = \\
 &\text{parciális integrálással, ahol } u = e^{-st} \text{ és } v' = f'(t) \\
 &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[f(t) \cdot e^{-st} \right]_0^{\omega} - \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\omega} f(t) \cdot (-s) \cdot e^{-st} dt = \\
 &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[f(\omega) \cdot e^{-s\omega} - e^0 \cdot f(0) \right] + s \cdot \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\omega} f(t) \cdot e^{-st} dt = \\
 &= -f(0) + s \cdot \bar{f}(s) = s \cdot \bar{f}(s) - f(0)
 \end{aligned}$$

Tehát az első derivált Laplace-transzformáltja

$$L[f'(t)] = s \cdot \bar{f}(s) - f(0) \quad (1.18)$$

Az előző (1.18) eredményt felhasználva a második derivált transzformáltjára a következő adódik.

$$\begin{aligned}
 L[f''(t)] &= s \cdot L[f'(t)] - f'(0) = s \cdot (s \cdot \bar{f}(s) - f(0)) - f'(0) = \\
 &= s^2 \cdot \bar{f}(s) - s \cdot f(0) - f'(0).
 \end{aligned}$$

Azaz

$$L[f''(t)] = s^2 \cdot \bar{f}(s) - s \cdot f(0) - f'(0) \quad (1.19)$$

Innen teljes indukcióval eljuthatunk az n -edik derivált Laplace-transzformáltjához.

$$\begin{aligned}
 L[f^{(n)}(t)] &= s^n \cdot \bar{f}(s) - s^{(n-1)} \cdot f(0) - s^{(n-2)} \cdot f'(0) - \dots - \\
 &\quad - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)
 \end{aligned} \quad (1.20)$$

A későbbiekben a differenciálegyenletek megoldásához csak az (1.18) és (1.19) egyenletekre, az első és a második deriváltak Laplace-transzformáltjára lesz szükségünk.

1.5. Inverz Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformáció alkalmazása a gyakorlatban legtöbbször abból áll, hogy adott cél érdekében meghatározzuk valamely függvények, differenciálegyenletek Laplace-transzformáltját. Az így kapott többnyire racionális kifejezésekkel műveleteket végzünk, melynek eredményeként kapunk valamilyen kifejezést. Ehhez a kifejezéshez meg kell keresnünk azt az eredeti függvényt, amelynek ő a Laplace-transzformáltja. Ezt az eredeti függvényt előállító eljárást nevezzük **inverz Laplace-transzformációnak**. Mivel a folytonos függvényt a Laplace-transzformáltja egyértelműen meghatározza, ezért $\bar{f}(s)$ -hez csak egy $f(t)$ függvény tartozik.

Definíció:

Az $\bar{f}(s)$ függvény **inverz Laplace-transzformáltjának** nevezzük és $L^{-1}[\bar{f}(s)]$ -sel jelöljük az olyan Laplace-transzformálható $f(t)$ függvényt, amelyre $L[f(t)] = \bar{f}(s)$.

Az eredeti függvényt egyszerűbb esetekben könnyen megadhatjuk az eddig tanult képletek alapján. Kicsit összetettebb a feladat ha a Laplace-transzformált olyan racionális törtfüggvény, melynek nevezője legalább harmadfokú polinom. Ebben az esetben a törtet, az integrálszámításnál már tanult módon, rész törték összegére kell felbontani. A keletkezett rész törték nevezője legfeljebb másodfokú polinom lehet, melyeknek az inverz Laplace-transzformáltját egyszerűen felírhatjuk.

Az alábbiakban néhány különböző típusú példában, az egyszerűbb átalakításokat is feltüntetve megmutatjuk, hogyan lehet megkeresni az inverz Laplace-transzformáltat, vagyis az eredeti függvényt.

Példák:

1.

$$\bar{f}(s) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s+3} - \frac{2s}{s^2-16}$$

Megoldás:

Ahhoz, hogy a Laplace-transzformáltakhoz hasonló alakú törtet kapjunk ebben a példában csak a számlálókban lévő konstansokat kell a törték elé írni.

$$\bar{f}(s) = \frac{3}{s} + 4 \frac{1}{s+3} - 2 \frac{s}{s^2-16}$$

Így az eredeti függvény:

$$f(t) = 3 + 4e^{-3t} - 2\cosh 4t$$

2.

$$\bar{f}(s) = \frac{3}{s^6} - \frac{2}{s^2+25}$$

Megoldás:

Az első tag $\frac{n!}{s^{n+1}}$ alakú, a második tag pedig $\frac{a}{s^2+a^2}$ képlethez hasonló alakú. Az első tag számlálójában tehát $5! = 120$ -nak kellene állni, ezért számlálót is nevezőt is 40-nel megszorozzuk. A második tagnál

5-tel szorozva a számlálót is, nevezőt is, majd kiemelve $\frac{2}{5}$ -öt a megfelelő

$$\text{alakú formulákhoz jutunk: } \bar{f}(s) = \frac{1}{40} \cdot \frac{120}{s^6} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{s^2+25}.$$

Az eredeti függvény tehát:

$$f(t) = \frac{1}{40} \cdot t^5 - \frac{2}{5} \cdot \sin 5t$$

3.

$$\bar{f}(s) = \frac{s-2}{s^2+6s+25}$$

Megoldás:

Ha a nevezőben másodfokú függvény van, akkor azt teljes négyzetté alakítjuk.

$$\bar{f}(s) = \frac{s-2}{(s+3)^2+16}$$

Ezt úgy formáljuk tovább, hogy a számlálóban is megjelenjen az $(s+3)$, azaz

$$\bar{f}(s) = \frac{(s+3)-5}{(s+3)^2+16}.$$

A kapott törtet a számlálóban lévő tagok alapján két résztörtre bonthatjuk.

$$\bar{f}(s) = \frac{(s+3)}{(s+3)^2 + 16} - \frac{5}{(s+3)^2 + 16} = \frac{(s+3)}{(s+3)^2 + 16} - \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{(s+3)^2 + 16}$$

Ezek után mindkét tagra az exponenciális függvénnyel szorzott függvény

$$\text{képletét alkalmazhatjuk. A két tag egyenként } L^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 16} \right] = \cos 4t$$

$$\text{valamint } L^{-1} \left[\frac{4}{s^2 + 16} \right] = \sin 4t \text{ alakú, csak az s-ek helyén (s+3) áll.}$$

Ezért az eredeti függvény:

$$f(t) = e^{-3t} \cdot \cos 4t - \frac{5}{4} \cdot e^{-3t} \cdot \sin 4t$$

4.

$$\bar{f}(s) = \frac{5s^2 - 19s + 17}{(s-1)(s-2)^2}$$

Megoldás:

A tört nevzője harmadfokú, ezért résztörtekre bontjuk.

$$\frac{5s^2 - 19s + 17}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}$$

Mindkét oldalt szorozzuk meg a közös nevezővel, $(s-1)(s-2)^2$ -nel.

$$5s^2 - 19s + 17 = A(s-2)^2 + B(s-2)(s-1) + C(s-1)$$

Válasszuk s-nek a nevező gyökeit és helyettesítsük be az egyenlet mindkét oldalába!

$$\text{Ha } s = 1, \text{ akkor } A = 3$$

$$\text{Ha } s = 2, \text{ akkor } C = -1$$

Ha a jobb oldalon elvégezzük a szorzást, akkor a másodfokú tag együtthatója

$(A+B)$ lesz. Ez nyilván egyenlő a bal oldalon lévő másodfokú tag együtthatójával,

így $A+B=5$, amiből felhasználva a már ismert $A=3$ -at, $B=2$ lesz.

$$\text{Tehát } \bar{f}(s) = \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}, \text{ ezért}$$

$$f(t) = 3e^t + 2e^{2t} - e^{2t} \cdot t.$$

5.

$$\bar{f}(s) = \frac{5s^2 + 11s}{(s^2 + 2)(s + 4)}$$

Megoldás:

Résztörtekre bontjuk a jobb oldali törtet

$$\frac{5s^2 + 11s}{(s^2 + 2)(s + 4)} = \frac{As + B}{s^2 + 2} + \frac{C}{s + 4}$$

a közös nevezővel való szorzás után

$$5s^2 + 11s = (As + B)(s + 4) + C(s^2 + 2)$$

$$5s^2 + 11s = (A + C)s^2 + (4A + B)s + 4B + 2C$$

ebből egyenlő együtthatók módszerével, miszerint az azonos fokszámú tagok együtthatói egyenlők, a következő egyenletrendszerhez jutunk

$$A + C = 5$$

$$4A + B = 11$$

$$4B + 2C = 0$$

melynek megoldása bázistranszformációval:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 11 & 0 & 1 & -4 & -9 & 0 & 1 & -4 & -9 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 18 & 36 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right|$$

$$A = 3 \quad B = -1 \quad C = 2. \text{ Tehát}$$

$$\bar{f}(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 2} + \frac{2}{s + 4} \text{ az első törtet tovább bontva}$$

$$\bar{f}(s) = 3 \frac{s}{s^2 + 2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} + \frac{2}{s + 4}, \text{ ebből az eredeti függvény}$$

$$f(t) = 3 \cos(t\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t\sqrt{2}) + 2e^{-4t}.$$

1.6. Laplace-transzformáció alkalmazása differenciálegyenletek megoldására

Laplace-transzformációval az állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenleteket tudjuk megoldani abban az esetben, ha adottak a nulla helyen vett kezdeti feltételek. A módszer használatával rögtön a kezdeti feltételeknek eleget tevő partikuláris megoldást kapjuk meg. A megoldás során Laplace-transzformációval a differenciálegyenletet algebrai egyenletté alakítjuk át, melyből az ismeretlen megoldásfüggvénynek a Laplace-transzformáltját fejezhetjük ki. Ebből az algebrai függvényből inverz Laplace-transzformáció alkalmazásával jutunk a differenciálegyenlet, adott kezdeti feltételeknek eleget tevő, partikuláris megoldásához.

Mi az első és másodrendű differenciálegyenletek megoldásait vizsgáljuk. Ezek alakjai:

$ay' + by = h(x)$, ahol $a \neq 0$ és adott az $y(0) = y_0$, illetve

$ay'' + by' + cy = h(x)$, ahol $a \neq 0$ és adottak az $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ kezdeti feltételek. Az egyenletekben b, c, y_0, y_1 tetszőleges valós számok.

Az y és deriváltjai x -től függő függvények, de a továbbiakban is a könnyebb áttekinthetőségért $y(x)$ helyett csak y -t és $\bar{y}(s)$ helyett csak $\bar{y}$ -t fogunk használni. A feladatok megoldása során használnunk kell az első és második derivált (1.18) és (1.19)-ben felírt Laplace-transzformáltjait, melyek alakja y -nal felírva:

$$L[y'(x)] = s \cdot \bar{y}(s) - y(0) = s \cdot \bar{y} - y(0)$$

$$L[y''(x)] = s^2 \cdot \bar{y}(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot \bar{y} - s \cdot y(0) - y'(0).$$

Példák:

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek adott kezdeti feltételeknek eleget tevő partikuláris megoldását Laplace-transzformáció segítségével.

1.

$$y' - 2y = e^{2x} - 3, \quad y(0) = -1$$

Megoldás:

Képezzük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját.

$$s\bar{y} - y(0) - 2\bar{y} = \frac{1}{s-2} - \frac{3}{s}.$$

Írjuk be az adott kezdeti feltételeket és fejezzük ki az egyenletből $\bar{y}$ -t.

$$s\bar{y} - (-1) - 2\bar{y} = \frac{1}{s-2} - \frac{3}{s}$$

$$\bar{y}(s-2) = \frac{1}{s-2} - \frac{3}{s} - 1 = \frac{-s^2+6}{s(s-2)}$$

$$\bar{y} = \frac{-s^2+6}{s(s-2)^2}$$

a jobb oldalt rész törtre bontjuk

$$\frac{-s^2+6}{s(s-2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{(s-2)^2}$$

megszorozzuk az egyenletet a közös nevezővel,

$$-s^2+6 = A(s-2)^2 + Bs(s-2) + Cs$$

elvégezzük a műveleteket, majd rendezzük a jobb oldalt

$$-s^2+6 = (A+B)s^2 + (-4A-2B+C)s + 4A$$

ebből egyenlő együtthatók módszerével megkapjuk A, B, C-t

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -\frac{5}{2}, \quad C = 1, \quad \text{tehát}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}$$

ebből inverz Laplace-transzformációval

$$y = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x}$$

2.

$$y'' + 6y' + 25y = 12e^{-4x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Megoldás:

Az egyenlet mindkét oldalának képezzük a Laplace-transzformáltját.

$$s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0) + 6(s\bar{y} - y(0)) + 25\bar{y} = \frac{12}{s+4}$$

Beírjuk az adott kezdeti feltételeket.

$$s^2\bar{y} - s - 1 + 6(s\bar{y} - 1) + 25\bar{y} = \frac{12}{s+4}$$

$$\bar{y}(s^2 + 6s + 25) = \frac{12}{s+4} + s + 7 = \frac{s^2 + 11s + 40}{s+4}$$

$$\bar{y} = \frac{s^2 + 11s + 40}{(s+4)(s^2 + 6s + 25)}$$

$$\frac{s^2 + 11s + 40}{(s+4)(s^2 + 6s + 25)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{s^2 + 6s + 25}$$

szorozzuk meg az egyenletet a közös nevezővel

$$s^2 + 11s + 40 = A(s^2 + 6s + 25) + (Bs + C)(s + 4)$$

$$s^2 + 11s + 40 = (A + B)s^2 + (6A + 4B + C)s + 25A + 4C$$

ebből egyenlő együtthatók módszerével a következő egyenletrendszert kapjuk

$$A + B = 1$$

$$6A + 4B + C = 11$$

$$25A + 4C = 40$$

melynek megoldása:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 11 & 2 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 25 & 0 & 4 & 40 & 25 & 0 & 4 & 40 & 17 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} \frac{5}{17} \\ \frac{95}{17} \\ \frac{12}{17} \end{array}$$

$$A = \frac{12}{17}, \quad B = \frac{5}{17}, \quad C = \frac{95}{17} \text{ tehát}$$

$$\bar{y} = \frac{12}{17} \cdot \frac{1}{s+4} + \frac{\frac{5}{17}s + \frac{95}{17}}{s^2 + 6s + 25}$$

$$\bar{y} = \frac{12}{17} \cdot \frac{1}{s+4} + \frac{5}{17} \cdot \frac{s+3}{(s+3)^2 + 16} + \frac{20}{17} \cdot \frac{4}{(s+3)^2 + 16}$$

$$y = \frac{12}{17} \cdot e^{-4x} + \frac{5}{17} \cdot e^{-3x} \cdot \cos 4x + \frac{20}{17} \cdot e^{-3x} \cdot \sin 4x$$

3.

$$y'' - y' - 6y = 12, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Megoldás:

Képezzük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját.

$$s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0) - (s\bar{y} - y(0)) - 6\bar{y} = \frac{12}{s}$$

a kezdeti feltételekkel

$$s^2\bar{y} - 1 - s\bar{y} - 6\bar{y} = \frac{12}{s}$$

$$(s^2 - s - 6)\bar{y} = \frac{12}{s} + 1 = \frac{12 + s}{s}$$

$$\bar{y} = \frac{12 + s}{s(s+2)(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3}$$

$$12 + s = A(s+2)(s-3) + Bs(s-3) + Cs(s+2)$$

Válasszuk s -nek a nevező gyökeit és helyettesítsük be az egyenlet mindkét oldalába!

$$\text{Ha } s = 0, \text{ akkor } 12 = -6A \text{ tehát } A = -2$$

$$\text{Ha } s = -2, \text{ akkor } 10 = 10B \text{ tehát } B = 1$$

$$\text{Ha } s = 3, \text{ akkor } 15 = 15C \text{ tehát } C = 1$$

$$\bar{y} = \frac{-2}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-3}$$

$$y = -2 + e^{-2x} + e^{3x}$$

[2] [3] [5] [1] [4]

$f(t)$	$\overline{f}(s)$
c	$\frac{c}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at} \cdot f(t)$	$\overline{f}(s-a)$
$t^n \cdot f(t)$	$(-1)^n \cdot \frac{d^n \overline{f}(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$s \cdot \overline{f}(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 \cdot \overline{f}(s) - s \cdot f'(0) - f(0)$

1.1. táblázat. Elemi függvények Laplace-tranformáltja

Irodalomjegyzék

- [1] dr. Császár Ákosné. *Matematika I/3*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [2] Sréterné dr. Lukács Zsuzsanna. *Matematika Útmutató 2. félév*. Budapesti Műszaki Főiskola, Budapest, 2001.
- [3] Sréterné dr. Lukács Zsuzsanna. *Matematika Útmutató 3. félév*. Budapesti Műszaki Főiskola, Budapest, 2001.
- [4] Szász Gábor. *Matematika II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [5] Obádovics J. Gyula. Szarka Zoltán. *Felsőbb Matematika*. Scolar Kiadó, Budapest, 1999.